

На правах рукописи

Доктор Физико-Математических наук
Проф. Д.Д. Мордухай-Балтовской.

ВЫСШАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Конспект курса, составленный студентом
Калашниковым И.К. по лекциям профессора.

Ростовский на Дону Педагогический Ин-
ститут.

1940 г.

Оглавление.

| | стр. |
|--|------|
| Основные понятия..... | 1 |
| <u>Отдел I.</u> | |
| Методы высшей геометрии (преобразования на прямой)..... | 4 |
| <u>Отдел II.</u> | |
| Преобразования на плоскости..... | 10 |
| Проектирование и аффинное преобразование..... | 16 |
| Аффинитет..... | 17 |
| Преобразование подобия в широком смысле..... | 20 |
| Аффинное преобразование в широком смысле..... | 21 |
| Проективное преобразование на плоскости..... | 22 |
| Инварианты проективного преобразования на плоскости..... | 24 |
| Задание проективного преобразования..... | 28 |
| Связь проектирования с проективным преобразованием..... | 30 |
| Инварианты и их отношение к определению преобразов. Координирование..... | 31 |
| Гармонические точки и средний гармонический центр..... | 32 |
| Построение гармонических точек..... | 33 |
| Перспективность..... | 34 |
| Двойные точки, двойные лучи..... | 35 |
| Основная теорема (рабочая) о перспективн. пунктуалах..... | 37 |
| Перспективное соответствие плоскостей..... | 38 |
| О гомологиях..... | 41 |
| Теорема Дезарга..... | 42 |
| Принцип непрерывности Понселе..... | 43 |
| Доказательство теоремы Дезарга..... | 44 |
| Четырехугольник Штайндта..... | 45 |
| Построение гармонических точек..... | 47 |
| О коллинеации..... | 48 |
| Инволюционное преобразование..... | 52 |
| Формула Дезарга..... | 55 |
| Двойные точки при инволюции..... | 56 |
| Центр инволюции..... | 57 |
| Понятие радикальной оси..... | 58 |
| Построение центра инволюции..... | 59 |
| Инволюционная гомология..... | 61 |
| Таблица конфигураций..... | 62 |
| <u>Отдел III.</u> | |
| Кривые второго порядка..... | 63 |
| Теорема Паскаля..... | 65 |
| О законе двойственности или взаимности..... | 69 |
| | 73 |

| | стр. |
|--|------|
| Теорема Бриансона (предварительная) | 76 |
| Связь понятий кривых второго порядка в аналитической и высшей геометрии | 79 |
| Полярные свойства кривых второго порядка | 81 |
| Полярный треугольник | 86 |
| Сопряженные точки и сопряженные прямые | 88 |
| Диаметральные свойства кривых | 91 |
| Некоторые свойства гиперболы и параболы | 93 |
| Вывод уравнений кривых 2 ^{го} порядка методами высшей геометрии | 97 |
| Преобразование взаимных поляр | 100 |

Отдел IV

| | |
|--|-----|
| Проективные пунктуалы и пучки 2 ^{го} порядка | 102 |
| Двойные элементы | 103 |
| Понятие о кривых третьего порядка | 104 |
| Наложённые пунктуалы второго порядка | 105 |
| Инволюционное соответствие | 109 |
| Инволюционная шестерка | 110 |
| Вторая теорема Дезарга | 112 |
| Общие точки двух пар наложённых инволюционных пунктуалов второго порядка | 113 |
| О двойных элементах инволюционных пучков | 115 |
| Фокальные свойства кривых | 116 |
| Построение фокусов кривых 2 ^{го} порядка | 117 |
| Понятие директрисы | 118 |
| Некоторые свойства фокусов | 119 |

Отдел V

| | |
|--|-----|
| Проективная метрика | 122 |
| Двойные точки абсолютной инволюции | 125 |
| Формула Лагерра | 132 |
| Равенство двух отрезков | 134 |
| Проективное определение отрезка числом | 135 |
| Отражения и симметрия | 135 |
| Расщепление движения на два отражения | 138 |
| Вопросы | 142 |

Основные понятия.

Высшая геометрия появляется там, где приходится понятие бесконечности. В противоположность элементарной геометрии, высшая геометрия оперирует с геометрическими образами, относимыми в бесконечность. Различаются потенциальная и актуальная бесконечности. Потенциальная бесконечность, это бесконечность в возможности. Так величина, которая может быть сделана сколь угодно большой при своем дальнейшем увеличении стремится к бесконечности; понятие бесконечности, присущее этой переменной, как раз и есть понятие бесконечности в потенции. Эта бесконечность лежит в основе теории пределов. Соответственно величинам бесконечно большим, существуют величины бесконечно малые, как величины переменные, изменяющиеся. Актуальная бесконечность — бесконечность завершения. Так, можно говорить об актуальной бесконечности по отношению к миру вселенной. Актуальное бесконечно малое выброшено из науки.

Об актуальной бесконечности можно говорить по отношению к точкам прямой, пространства, плоскости, как о бесконечных множествах, мощности которых различны.

Если переменным величинам x, y, z , при всех их изменениях присуще некоторое свойство ω , то оно присуще и их пределам. Этот общий принцип теории пределов включает в себя частные теоремы пределов. Исходя из него, если

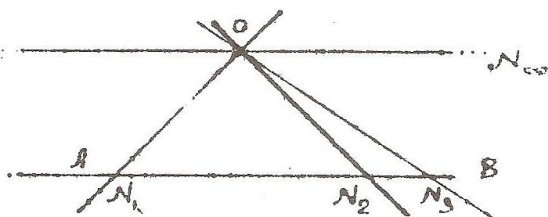
$$x \rightarrow A, \quad y \rightarrow B; \quad \text{и} \quad \frac{x}{y} = \frac{m}{n}, \quad \text{то} \quad \frac{A}{B} = \frac{m}{n}.$$

Определения элементарной геометрии отличны от определений геометрии высшей. Так, по определению элем. геометрии, если прямая лежит вне круга и имеет с последним одну общую точку, то прямая есть касательная. В высшей геометрии касательная рассматривается как предельное положение секущей, проходящей через M и N , при бесконечном сближении этих точек.

Таким образом, в определении касательной вводится понятие потенциальной бесконечности.

Евклид определяет параллельные прямые как такие, которые при своем продолжении в плоскости не пересекаются. Подобно

этому параллельные определяются как прямые в плоскости, находящиеся все время на одинаковой расстоянии. Высшая геометрия вводит понятие бесконечности: параллельными прямыми называются такие две предельно расто-



Черт. № 1.

долженные пересекающиеся прямые в плоскости, в предположении, что точка пересечения уходит в бесконечность.

Эвартон считал, что на прямой существуют две бесконечно удаленные точки. С точки зрения современного суждения, прямая имеет только одну бесконечно удаленную точку. Признавая существование двух бесконечно удаленных точек на прямой: слева одной, и другой справа, мы приходим к необходимости считать, что параллельные прямые или две пересекающиеся в своем предельном положении прямые, имеют две общие точки. Но тогда теряется справедливость общего принципа пределов, что существующая зависимость между переменными в процессе их изменения остается справедливой и в пределе. Такое, на вид формальное, признание одной бесконечно удаленной точки на прямой, оказывает экономизирующее воздействие на аксиоматику геометрии.

Бесконечно удаленная точка относится к несобственным элементам. Бесконечно удаленная прямая есть геометрическое место бесконечно удаленных точек плоскости. С прямой такая д.уд. прямая имеет только одну общую точку. Надо сказать, что форма при бесконечном удалении ее составляющих точек теряется. О форме бесконечности речи быть не может.

Используя существование одной несобственной точки на прямой, можно свести следующие две аксиомы к одной:

1). Через две точки можно провести прямую и притом только одну; или, двум точкам принадлежит одна и только одна прямая (обе точки предполагаются собственными):

2). Из заданной точки O , вне прямой AB , можно провести одну и только одну прямую, параллельную данной. Действительно последняя (2) аксиома при условии существования несобственной точки N_{∞} может свестись к первой, ибо провести параллельную — понятие равносильное понятию проведения прямой через собственную точку O и бесконечно удаленную точку N_{∞} ;

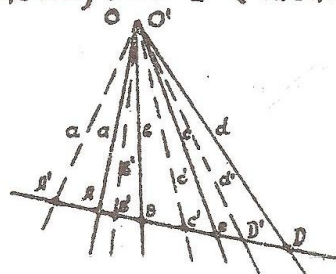
Прямая параллельная понимается проходящей через собственный элемент — точку O и несобственный элемент — точку N_{∞} . Также и относительно плоскостей:

1). Трём точкам, не лежащим на одной прямой, соответствует плоскость и притом только одна.

2). Через точку A , лежащую вне данной плоскости α

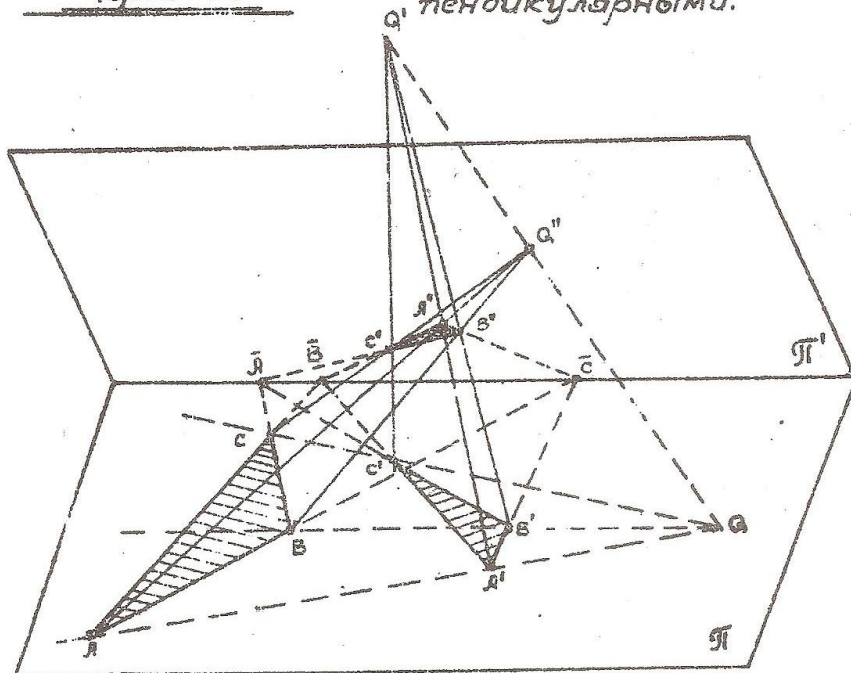
Решение задач.

Наиболее применительны понятия при решении задач следующие: 1) Четырехугольник Штаудта. 2) Гармонические лучи и точки. 3) Если одна из гармонических точек уходит на ∞ , то другая из этой пары становится серединой второй пары. 4) Если в двух проективных пучках три соответственных луча образуют между собой одинаковые углы, то четвертая пара пересекается под тем же углом. Действительно, положим, что имеем два пучка (abcd...) и (a'b'c'd'...). Совместим O и O'. Пучки стали концентричными, причем лучи OA, OB, OC с лучами O'A, O'B, O'C образуют соответственно равные углы. Покажем, что и \angle между OD и O'D' тот же. Повернем пучок



Черт. 72.

O так, чтобы лучи: OA и O'A, OB и O'B, OC и O'C совпали. Но тогда совпадут и OD с O'D', т.к. достаточно иметь три двойных луча, чтобы пучки, если они проективны и концентричны, были конгруэнтны. Теорема, очевидно верна, если лучи будут перпендикулярными.



Черт. 1. К теореме Дезарга

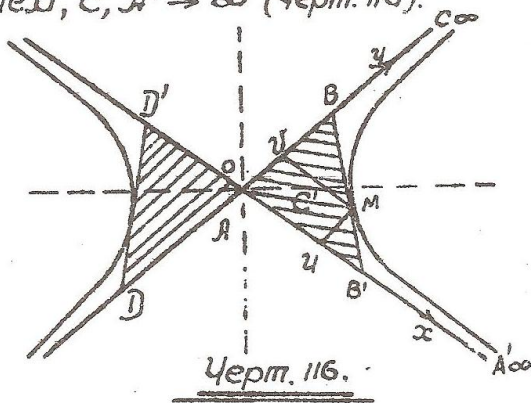
Вывод уравнений кривых 2^{го} порядка методами высшей геометрии.

Докажем, что кривые второго класса (а потому и 2^{го} порядка), построенные методами высшей геометрии суть одно и то же, что и кривые второго порядка в аналитической геометрии, т.е. что первые имеют такое же аналитическое выражение, как и вторые. Этим мы докажем, что кривые второго порядка высшей геометрии не содержат таких, которые бы отсутствовали в совокупности кривых второго порядка в аналитике.

Покажем, это для гиперболы.

Теорема. Площади треугольников, образованных асимптотами и касательными, проведенными в любой точке, гиперболы равны между собой.

Из определения кривой 2^{го} класса $(ABC\bar{D}) = (A'B'C'D')$, причем, $C, A' \rightarrow \infty$ (черт. 116).



Черт. 116.

Отсюда

$$\frac{AC}{BC} \cdot \frac{AD}{BD} = \frac{A'C'}{B'C'} \cdot \frac{A'D'}{B'D'}$$

но $\frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{A'D'} = 1$, поэтому

$$\frac{B'D'}{B'C'} = \frac{BD}{AD};$$

Составляя производные пропорции, получаем:

$$\frac{B'D' - B'C'}{B'C'} = \frac{BD - AD}{AD}; \rightarrow \frac{C'D'}{B'C'} = \frac{-AB}{AD};$$

$$\text{или } C'D' \cdot AD = B'C' \cdot AB \rightarrow AB \cdot AB' = AD \cdot AD' \dots (1)$$

Если угол между асимптотами φ , то

$$\frac{1}{2} AB \cdot AB' \cdot \sin \varphi = \frac{1}{2} AD \cdot AD' \cdot \sin \varphi.$$

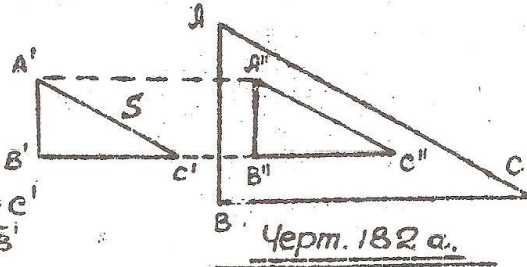
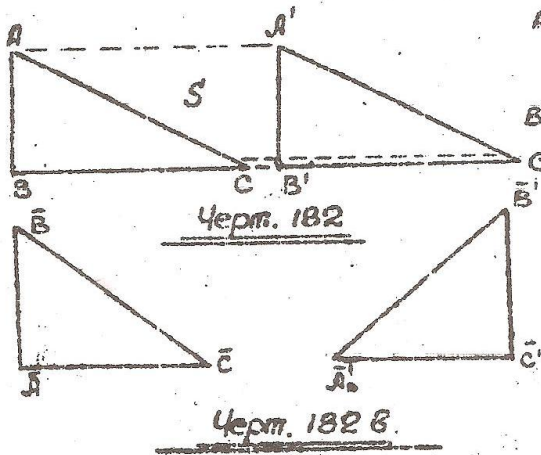
Но это равносильно тому, что: пл. $\Delta AB'B' = \text{пл. } \Delta AD'D'$.

Пусть асимптоты являются осями координат Ox и Oy . BB' делится точкой M пополам, как было доказано

Почему бы не сводить, наоборот, к движению се преобразования? Дело в том, что некоторые преобразования, для сведения их к движению требуют выхода, перехода в пространство. Так, односторонняя конгруэнтность или подобие сводимое к преобразованию движением, не требуя выхода из плоскости. Другое совсем дело, если конгруэнтность, гомотетия или подобие разнонаправленного характера. Так, треугольник ABC переводим для совпадения с $A'B'C'$ движением в плоскости, $A'B'C'$ переводим в положение $A''B''C''$ движением в плоскости и следовательно то и другое есть

$$S = \sigma \circ \sigma''$$

Чтобы $A'B'C'$ перевести в $A''B''C''$ надо выйти в пространство, если использовать только преобразование движением.



Но с помощью отображения эту операцию можно выполнить в плоскости. Можно рассматривать, следовательно, что конгруэнтность сводится к движению и отображению.

Проф. Д. Линдберг

Вопросы.

I. Основные понятия.

1. Чем отличается высшая геометрия от элементарной?
2. Что такое потенциальная и актуальная бесконечность?
3. Сколько бесконечно удаленных точек на прямой?
4. Как формулировать аксиому о параллельных прямых с помощью несобственной точки?
5. Какие зрительные аксиомы существуют о точке, прямой и плоскостях?
6. Что такое бесконечно удаленная прямая и бесконечно удаленная плоскость?
7. Как перевести на язык элементарной геометрии зрительные аксиомы, относящиеся к несобственным элементам?
8. Что такое основные элементарные формы?
9. Укажи основные формы первой, второй и третьей степени?
10. Что такое элемент и что такое носитель?
11. Что является в пучке прямых носителем и элементом?
12. Что является в пучке плоскостей носителем и элементом?
13. Что определяет $\frac{A}{a}$; $\frac{a}{Aa}$; $\frac{a}{a}$?
14. Что такое инвариант преобразования?
15. Что такое группа?
16. Образует ли подобное преобразование группу?
17. ~"~ ~"~ симметрия группы?
18. Преобразования движения; образуют ли они группу?
19. Укажи инвариант преобразования движения?
20. Какой объект сохраняется при преобразовании движения?

II. Подобие и аффинное преобразование.

21. Что такое подобное преобразование в узком смысле?
22. Как оно определяется аналитически?
23. Что такое гомотетия?
24. Что такое подобное преобразование в широком смысле?
25. На какие две подобные группы подразделяется общее подобное преобразование?
26. Что является инвариантом подобного преобразования?
27. Как аналитически определить подобное преобразование?