На правах рукописи

Доктор Физико-Математических наук
Проф. Д.Д. Мордухай-Болтовской.

Высшая геометрия

Конспект курса, составленный студентом Калашниковым Н.К. по лекциям профессора.

Ростовский на Дону Педагогический Институт.

1940 г.

Оглавление.-

Отдел IV

Отдел V

Основные понятия.

Высшая геометрия появляется там, где приходит понятие бесконечности. В противоположность элементарной геометрии, высшая геометрия оперирует с геометрическими образами, относимыми в бесконечность. Различаются потенциальная и актуальная бесконечности. Потенциальная бесконечность,- это бесконечность в возможности. Так величина, которая может быть сделана сколь угодно большой при своем дальнейшем увеличении стремится к бесконечности; понятие бесконечности, присущее этой переменной, как раз и есть понятие бесконечности в потенции. Эта бесконечность лежит в основе теории пределов. Соответственно величинам бесконечно большим, существуют величины бесконечно малые, как величины переменные, изменяющиеся. Актуальная бесконечность - бесконечность завершения. Так можно говорить об актуальной бесконечности по отношению к мирам вселенной. Актуальное бесконечно малое выброшено из науки.

Об актуальной бесконечности можно говорить по отношению к точкам прямой, пространства, плоскости как о бесконечных множествах, мощности которых различны.

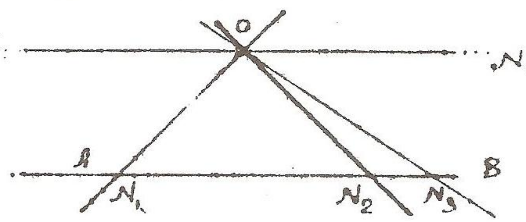
Если переменным величинам x, y, z, при всех их изменениях присуще некоторое свойство ω, то оно присуще и их пределам. Этот общий принцип теории пределов включает в себя частные теоремы пределов. Исходя из него, если

$$x \to A, \; y \to B; \qquad \text{и} \; \frac{x}{y} = \frac{m}{n}, \; \text{то} \; \frac{A}{B} = \frac{m}{n}.$$

Определения элементарной геометрии отличны от определений геометрии высшей. Так, по определению элем. геометрии, если прямая лежит вне круга и имеет с последним одну общую точку, то прямая есть касательная. В высшей геометрии касательная рассматривается как предельное положение секущей, проходящей через M и N, при бесконечном сближении этих точек.

Таким образом, в определение касательной вводится понятие потенциальной бесконечности.

Евклид определяет параллельные прямые как такие, которые при своем продолжении в плоскости не пересекаются. Подобно



Черт. № 1.

этому параллельные определяются как прямые в плоскости, находящиеся все время на одинаковом расстоянии. Высшая геометрия вводит понятие бесконечности: параллельными прямыми называются такие две предельно расположенные пересекающиеся прямые в плоскости, в предположении, что точка пересечения уходит в бесконечность.

Ньютон считал, что на прямой существуют две бесконечно удаленные точки. С точки зрения современного суждения, прямая имеет только одну бесконечно удаленную точку. Признавая существование двух бесконечноудаленных точек на прямой: слева одной, и другой справа, мы приходим к необходимости считать, что параллельные прямые или две пересекающиеся в своем предельном положении прямые, имеют две общие точки. Но тогда теряется справедливость общего принципа пределов, что существующая зависимость между переменными в процессе их изменения остается справедливой и в пределе. Такое, на вид формальное, признание одной бесконечноудаленной точки на прямой, оказывает экономизирующее воздействие на аксиоматику геометрии.

Бесконечно удаленная точка относится к несобственным элементам. Бесконечно удаленная прямая есть геометрическое место бесконечно удаленных точек плоскости. С прямой такая б.уд. прямая имеет только одну общую точку. Надо сказать, что форма при бесконечном удалении ее составляющих точек теряется. О форме в бесконечности речи быть не может.

Используя существование одной несобственной точки на прямой, можно свести следующие две аксиомы к одной:

1). Через две точки можно провести прямую и притом только одну; или, двум точкам принадлежит одна и только одна прямая (обе точки предполагаются собственными):

2). Из заданной точки О, вне прямой АВ, можно провести одну и только одну прямую, параллельную данной. Действительно последняя (2) аксиома при условии существования несобственной точки N_∞ может свестись к первой, ибо провести параллельную-понятие равносильное понятию проведения прямой через собственную точку О и бесконечно удаленную точку N_∞;

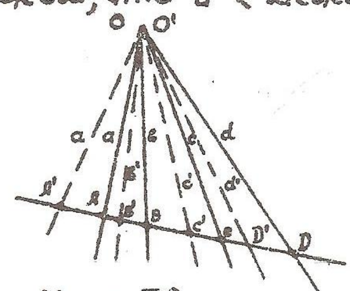
Прямая параллельная мыслится проходящей через собственный элемент - точку О и несобственный элемент - точку N_∞. Тоже и относительно плоскостей:

1). Трем точкам, не лежащим на одной прямой, соответствует плоскость и притом только одна.

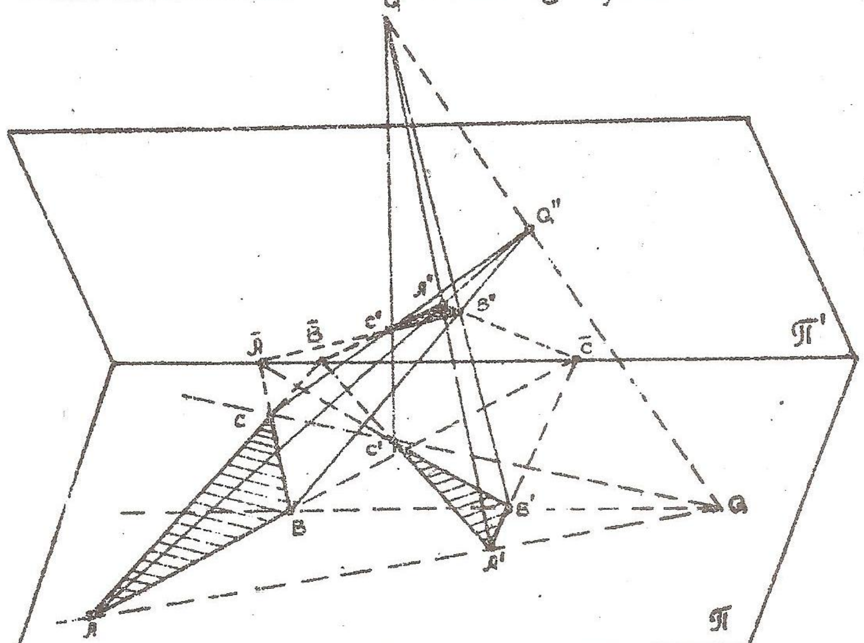
2). Через точку А, лежащую вне данной плоскости α

Решение задач.

Наиболее применительны понятия при решении задач следующие: 1) Четырехугольник Штаудта. 2) Гармоничесие лучи и точки. 3) Если одна из гармонических точек уходит на ∞, то другая из этой пары становится посредине второй пары. 4) Если в двух проективных пучках три соответственных луча образуют между собой одинаковые углы, то четвертая пара пересекается под тем же углом. Действительно, положим, что имеем два пучка $(abcd\ldots) \barwedge (a'b'c'd'\ldots)$. Совместим O и O'! Пучки стали концентричными, причем лучи OA, OB, OC с лучами $O'A', O'B', O'C'$ образуют соответственно равные углы. Покажем, что и $<$ между OD и $O'D'$ тот же. Повернем пучок O' так, чтобы лучи: OA и $O'A'$, OB и $O'B'$, OC и $O'C'$ совпали. Но тогда совпадут и OD с $O'D'$, т.к. достаточно иметь три двойные луча, чтобы пучки, если они проективны и концентричны, были конгруэнтны. Теорема очевидно верна, если лучи будут перпендикулярными.



Черт. 72.



Черт. 1. К теореме Дезарга

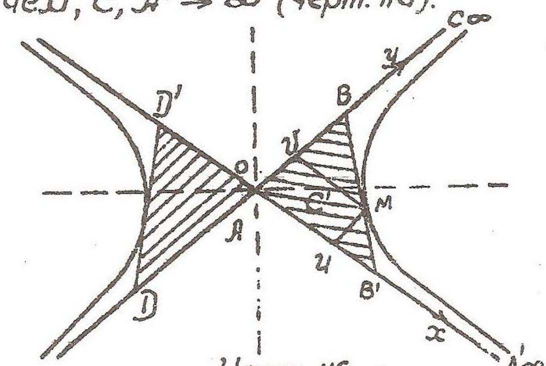
Вывод уравнений кривых 2^го^ порядка методами высшей геометрии.

Докажем, что кривые второго класса (а потому 2^го^ порядка), построенные методами высшей геометрии суть одно и тоже, что и кривые второго порядка в аналитической геометрии, т.е. что первые имеют такое же аналитическое выражение, как и вторые. Этим мы докажем, что кривые второго порядка высшей геометрии не содержат таких, которые бы отсутствовали в совокупности кривых второго порядка в аналитике.

Покажем, это для гиперболы.

Теорема. Площади треугольников, образованных асимптотами и касательными, проведенными в любой точке, гиперболы равны между собой.

Из определения кривой 2^го^ класса $(ABCD) = (A'B'C'D')$, причем, $C, A' \to \infty$ (черт. 116).



Черт. 116.

Отсюда

$$\frac{\bar{AC}}{\bar{BC}} : \frac{\bar{AD}}{\bar{BD}} = \frac{\bar{A'C'}}{\bar{B'C'}} : \frac{\bar{A'D'}}{\bar{B'D'}}$$

но $\frac{\bar{AC}}{\bar{BC}} = \frac{\bar{A'C'}}{\bar{A'D'}} = 1$, поэтому

$$\frac{\bar{B'D'}}{\bar{B'C'}} = \frac{\bar{BD}}{\bar{AD}};$$

Составляя производные пропорции, получаем:

$$\frac{\bar{B'D'} - \bar{B'C'}}{\bar{B'C'}} = \frac{\bar{BD} - \bar{AD}}{\bar{AD}}; \quad \to \quad \frac{\bar{C'D'}}{\bar{B'C'}} = \frac{-\bar{AB}}{\bar{AD}};$$

или $C'D' \cdot AD = B'C' AB \;\to\; AB \cdot AB' = AD \cdot AD'$ ..... (I)

Если угол между асимптотами φ, то

$$\frac{1}{2} AB \cdot AB' \cdot \sin\varphi = \frac{1}{2} AD \cdot AD' \cdot \sin\varphi.$$

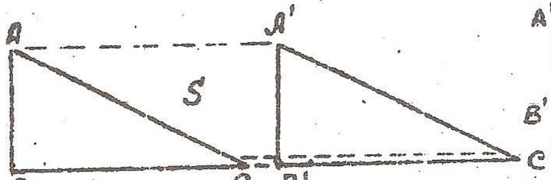
Но это равносильно тому, что: пл. $\Delta ABB'$ = пл. $\Delta ADD'$.

Пусть асимптоты являются осями координат ox и oy. BB' делится точкой M пополам, как было доказано

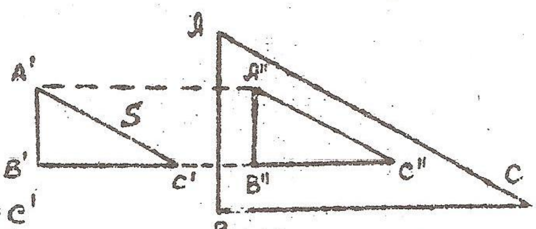
Почему бы не сводить, наоборот, к движению все преобразования? Дело в том, что некоторые преобразования, для сведения их к движению требуют выхода, перехода в пространство. Так, однонаправленная конгруентность или подобие сводимое к преобразованию движения, не требуя выхода из плоскости. Другое совсем дело, если конгруентность, гомотетия или подобие разнонаправленного характера. Так, треугольник ABC переводим для совпадения с A'B'C' движением в плоскости, A'B'C' переводим в положение A"B"C" движением в плоскости и следовательно то и другое есть

$$S = \sigma'\sigma''$$

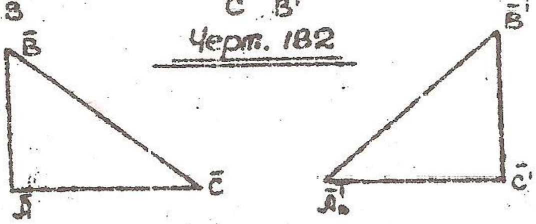
Чтобы $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ перевести в $\bar{A}'\bar{B}'\bar{C}'$ надо выйти в пространство, если использовать только преобразование движения.



Черт. 182



Черт. 182 а.



Черт. 182 в.

Но с помощью отображения эту операцию можно выполнить в плоскости. Можно рассматривать, следовательно, что конгруентность сводится к движению и отображению.

Проф. Д. Мордухай-Болтовской

Стеклография Р.Г.У. тир. 46 - 10 июня 1940 г.
г. Ростов н/Д.

Вопросы.

I. Основные понятия.

1. Чем отличается высшая геометрия от элементарной?
2. Что такое потенциальная и актуальная бесконечность?
3. Сколько бесконечно удаленных точек на прямой?
4. Как формулировать аксиому о параллельных прямых с помощью несобственной точки?
5. Какие зрительные аксиомы существуют о точке, прямых и плоскостях?
6. Что такое бесконечно удаленная прямая и бесконечно удаленная плоскость?
7. Как перевести на язык элементарной геометрии зрительные аксиомы, относящиеся к несобственным элементам?
8. Что такое основные элементарные формы?
9. Укажи основные формы первой, второй и третьей ступени?
10. Что такое элемент и что такое носитель?
11. Что является в пучке прямых носителем и элементом?
12. Что является в пучке плоскостей носителем и элементом?
13. Что определяет $\frac{A}{a}$; $\frac{a}{A}$; $\frac{\alpha}{a}$?
14. Что такое инвариант преобразования?
15. Что такое группа?
16. Образует ли подобное преобразование группу?
17. —"— —"— симметрия группу?
18. Преобразования движения; образуют ли они группу?
19. Укажи инвариант преобразования движения?
20. Какой объект сохраняется при преобразовании движения?

II. Подобие и афинное преобразование.–

21. Что такое подобное преобразование в узком смысле?
22. Как оно определяется аналитически?
23. Что такое гомотетия?
24. Что такое подобное преобразование в широком смысле?
25. На какие две подобные группы подразделяется общее подобное преобразование?
26. Что является инвариантом подобного преобразования?
27. Как аналитически определить подобное преобразование?